Trimestre Septiembre-Diciembre 2007
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Probabilidades para Ingenieros — CO3121
Guía de ejercicios # 5 (Primera parte)

Contenido

- Distribuciones de probabilidad conjunta
- Distribuciones marginales y condicionales
- Independencia de variables aleatorias
- Cambio de variable multidimensional

Ejercicios

1. Sea X y Y la duración de la vida, en años, de dos componentes en un sistema electrónico. Si la función de densidad conjunta de estas variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre $P(0 < X < 1 | Y = 2)$.

2. Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 ó 3 veces en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia. Su distribución de probabilidad conjunta está dada como

$f(x,y)$		x = 1	2	3
	1	0,05	0,05	0,1
y	2	0,05	0,1	0,35
	3	0	0,2	0,1

   a) Evalúe la distribucion marginal de X.
   b) Evalúe la distribución marginal de Y.
   c) Encuentre $P(Y = 3|X = 2)$

3. Suponga que X y Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$f(x,y)$		x = 2	4
	1	0,10	0,15
y	3	0,20	0,30
	5	0,10	0,15

   a) Encuentre la distribucion marginal de X.
   b) Encuentre la distribución marginal de Y.

4. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias x y Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x-y}{9}, & 1 < x < 3,\ 1 < y < 2, \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre las funciones de densidad marginal de X y Y.

b) ¿Son independientes X y Y?
c) Encuentre $P(X > 2)$

5. Demuestre que, el par (X, Y) tiene distribución uniforme sobre el rectángulo $(a, b) \times (c, d)$ si, y solo si, las variables X e Y son independientes, $X \sim \text{Unif}\,(a, b)$ y $Y \sim \text{Unif}\,(c, d)$.

6. En condiciones ideales, la temperatura T, presión S y volumen V, de un gas, están relacionados mediante $T = \alpha\, S\, V$, siendo α una constante de proporcionalidad. Si S y V son variables aleatorias con densidad conjunta:
$$f(s, v) = \begin{cases} \frac{1}{s^2 v^2} & \text{si } s \geq 1,\ v \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Determinar la densidad de la variable T.

7. Los tiempos de vida, $X_1, \ldots, X_n$ de n circuitos integrados que forman parte de un módulo, son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1{,}12 \times 10^{-12}\text{seg}^{-1}$. Hallar la distribución de la variable correspondiente al tiempo en que, por vez primera, se daña uno de los circuitos. Determinar la densidad de la variable T.

8. Se eligen, de manera independiente, 5 números con distribución $U[a, b]$
   a) Hallar la probabilidad de que todos ellos sean mayores que $\frac{a+b}{2}$
   b) Hallar la probabilidad de que el máximo de los números elegidos no pase de $(a + 9\,b)/10$.

9. Se elige un punto al azar, uniformemente, en la bola unitaria 3-dimensional. Hallar la f.d.a. y la densidad de su distancia al origen.

10. Debido a variabilidad en el proceso de producción, el *coeficiente de desgaste* Γ, de los amplificadores producidos por una fabrica, tiene una distribución $\text{Unif}\,(a, b)$, con $b > a > 0$. A su vez, el tiempo de vida T, en segundos, de un amplificador con coeficiente de desgaste Γ, tiene distribución exponencial de parámetro Γ. Hallar la probabilidad de que un amplificador producido por esta fábrica dure mas de 20 meses.